ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ NA

SỰ XÁC ĐỊNH ĐA THỨC VI PHÂN CÁC HÀM PHÂN HÌNH QUA NGHỊCH ẢNH CỦA TẬP ĐIỂM

Ngành: Toán giải tích

Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan luận văn **"Sự xác định đa thức vi phân các hàm phân hình qua nghịch ảnh của tập điểm"** là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **GS-TSKH. Hà Huy Khoái**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi còn sử dụng một số kết quả, nhận xét của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 03 năm 2019

Tác giả

NGUYỄN THỊ NA

Lời cảm ơn

Để hoàn thành đề tài luận văn và kết thúc khóa học, với tình cảm chân thành, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi có môi trường học tập tốt trong suốt thời gian tôi học tập, nghiên cứu tại trường.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới **GS-TSKH . Hà Huy Khoái** đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành đề tài luận văn tốt nghiệp này. Đồng thời, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn tới thầy cô trong Khoa Toán, bạn bè đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn tốt nghiệp này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 03 năm 2019

Tác giả

NGUYỄN THỊ NA

Mục lục

Lời mở đầu **2**

1 Giả thuyết Bruck **3**

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị 3

1.2 Bài toán về xác định duy nhất đa thức vi phân 13

1.3 Quan hệ số khuyết 19

1.4 Các hàm chia sẻ giá trị 21

1.5 Sự xác định duy nhất có tham gia của đạo hàm 22

1.6 Các hàm chia sẻ tập hợp 23

1.7 Một số kết quả về giả thuyết Bruck 25

2 Tập xác định duy nhất và số khuyết **33**

2.1 Tập xác định duy nhất các hàm 33

2.2 Tập xác định duy nhất đa thức vi phân 40

Kết luận **48**

Tài liệu tham khảo **49**

Lời mở đầu

Lý thuyết phân bố giá trị các hàm phân hình là một cột mốc quan trọng của giải tích phức trong thế kỉ trước. Lý thuyết này đã phát triển mạnh bởi nhà toán học Rolf Nevanlinna trong những năm 1920. Trong phạm vi và tầm ảnh hưởng của mình, phép tính xấp xỉ của ông ta đã vượt trội so với kết quả trước và ngày nay tên ông được dùng để gọi lý thuyết phân bố giá trị các hàm phân hình.

Nền tảng của lý thuyết này chính là định lý cơ bản thứ nhất và định lý cơ bản thứ hai. Trong đó định lý cơ bản thứ nhất nghiên cứu hàm đặc trưng của hàm phân hình còn định lý cơ bản thứ hai nghiên cứu sâu hơn về số khuyết của các hàm phân hình. Lý thuyết Nevanlinna có nhiều ứng dụng. Một trong những ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna là nghiên cứu sự xác định duy nhất của hàm phân hình. Kết quả đẹp nhất của Nevanlinna trong lý thuyết duy nhất là định lý Năm điểm. Kế thừa những thành tựu đi trước của Li, Yang, Rubel,Mues-Steinmets...Năm 1996 Bruck đã đề xuất ra một giả thuyết nổi tiếng khi xét mối quan hệ giữa hàm chỉnh hình nguyên và đạo hàm khi chia sẻ một giá trị CM. Sau đó Liu-Yang, Zhang,Lu,Li-Yang... mở rộng kết quả của mình liên quan đến giả thuyết Bruck tới hàm phân hình, hàm nhỏ, tới đơn thức và đa thức vi phân.

Nội dung chính của luận văn gồm hai chương

Chương 1. Giả thuyết Bruck

Chương này bao gồm một số kiến thức chuẩn bị, mô tả một số kết quả của lý thuyết Nevanlinna, khái niệm tập xác định duy nhất khi xét nghịch ảnh của tập điểm và một số kết quả của giả thuyết Bruck.

Chương 2. Tập xác định duy nhất và số khuyết

Ở đây chúng ta tìm hiểu về tập xác định duy nhất của các hàm và tập xác định duy nhất đa thức vi phân

Luận văn sử dụng các phương pháp kĩ thuật của lý thuyết Nevanlinna và Giải tích phức cùng với một số phép biến đổi về đa thức một biến.

Luận văn có mục tiêu trình bày một số kết quả gần đây trong hướng nghiên cứu về sự xác định của đa thức vi phân các hàm phân hình thông qua nghịch ảnh của tập điểm là một trong những vấn đề được quan tâm của Giải tích phức, đề tài có ý nghĩa khoa học trong ngành Giải tích phức hẹp hơn là lý thuyết phân bố giá trị,là đề tài có tính thời sự.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 03 năm 2019

Tác giả

NGUYỄN THỊ NA

Chương 1

Giả thuyết Bruck

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Mục đích của chương này là mô tả một số kết quả chính của lý thuyết Nevanlinna. Chứng minh sẽ không được trình bày đầy đủ. Tham khảo chính cho phần này là tài liệu của Hayman ([27]). Có thể xem một tổng quan ngắn về lý thuyết Nevanlinna qua bài báo ([14]). Cho $\mathbb{C}$ là mặt phẳng phức. Hàm f được gọi là giải tích trong miền $D \subset \mathbb{C}$ nếu $f'(z)$ tồn tại hữu hạn tại mọi điểm của D. Hàm f được gọi là giải tích tại điểm $z = z_0$ nếu tồn tại một lân cận của điểm z_0 ở đó f là giải tích.

Điểm $z = z_0 \in \mathbb{C}$ gọi là điểm không kì dị của hàm f nếu f là giải tích tại z_0. Điểm z_0 gọi là một điểm kì dị của f nếuf không giải tích tại z_0, nhưng mọi lân cận của z_0 đều chứa ít nhất một điểm mà tại đó f giải tích.

Điểm kỳ dị z_0 của f gọi là kì dị cô lập của f nếu f là xác định và giải tích trong lân cận nào đó của z_0, trừ ra tại chính điểm đó. Nếu ngược lại, z_0 được gọi là điểm kì dị không cô lập của f.

Giả sử $z = \alpha$ là điểm kì dị cô lập của hàm giải tích f. Khi đó, trong lân cận nào đó của $z = \alpha$, trừ ra tại chính điểm đó, f có thể được khai triển dưới dạng sau:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{-n}.$$

Chuỗi khai triển của f theo các lũy thừa âm và không âm của $z-\alpha$ được gọi là khai triển Laurent của f. Nếu đặc biệt, f là giải tích tại $z=\alpha$ thì $b_n=0$ với $n=1,2,3,...$ và khai triển tương ứng này gọi là khai triển Taylor của hàm f.

Trong khai triển Laurent phần $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ gọi là *phần đều* và phần $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{-n}$ gọi là *phần chính*. Phần chính có ba khả năng xảy ra:

i) Nếu tất cả hệ số $b_n=0$ thì ta gọi $z=\alpha$ là điểm kì dị khử được của f, bởi vì có thể làm cho f chỉnh hình tại $z=\alpha$ bằng cách định nghĩa phù hợp giá trị của nó tại $z=\alpha$.

ii) Nếu phần chính của f tại α chứa hữu hạn hệ số khác 0 thì f được gọi là có cực điểm tại $z=\alpha$. Nếu $b_m(m\geq 1)$ là hệ số không triệt tiêu đầu tiên trong phần chính thì α được gọi là cực điểm của f với cấp m.

iii) Nếu phần chính của f tại α chứa vô hạn hệ số khác không thì f được gọi là điểm kì dị cốt yếu tại $z=\alpha$.

Nếu f là giải tích tại $z=\alpha$ và $a_0=a_1=...=a_{k-1}=0$ và $a_k\neq 0$ trong khai triển Taylor của f quanh α thì khai triển có dạng $f(z)=\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$. Trong trường hợp này, $z=\alpha$ gọi là không điểm của f với bội k .

Hàm $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ gọi là hàm nguyên nếu nó giải tích trên toàn bộ mặt phẳng phức. Ngoài ra f gọi là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ nếu f là giải tích trên $\mathbb{C}$, có thể trừ ra tại các điểm kì dị cô lập, mỗi điểm trong số đó đều là cực điểm.

Mỗi hàm phân hình trong mặt phẳng phức có thể có vô số cực điểm hoặc không điểm, hoặc a-điểm, nhưng nó chỉ có hữu hạn những điểm nói trên trong mỗi miền xác định hữu hạn. Nếu ngược lại, sẽ tồn tại ít nhất một điểm giới hạn của các cực điểm, hoặc của các không điểm, hoặc của các a-điểm trong mặt phẳng hữu hạn. Nếu đó là điểm giới hạn của các không điểm hoặc của các a-điểm, hàm sẽ đồng nhất bằng hằng số (theo định lý

xác định duy nhất). Nếu đó là là điểm giới hạn của các cực điểm thì điểm đó sẽ là điểm kì dị cốt yếu.

Đối với điểm vô hạn, có hai trường hợp:

i) Điểm vô hạn là điểm chính quy hoặc cực điểm. Khi đó hàm có hữu hạn cực điểm hoặc không điểm. Trong trường hợp này hàm gọi là hàm phân hình hữu tỷ.

ii) Điểm vô hạn là kì dị cốt yếu. Khi đó hàm có vô số cực điểm hoặc không điểm, hoặc a- điểm hội tụ đến điểm vô cùng. Trong trường hợp này hàm gọi là hàm phân hình siêu việt.

Bây giờ chúng ta phát biểu công thức Poisson-Jensen ([2]) cho hàm phân hình f trên đĩa $|z| \leq R(0 < R < \infty)$, là điểm khởi đầu của lý thuyết Nevanlinna.

Định lý 1.1.1. *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong $|z| \leq R$, $(0 < R < \infty)$, $a_\mu(\mu = 1, 2, ..., m)$ và $b_\nu(\nu = 1, 2, ..., n)$ tương ứng là các không điểm và cực điểm của $f(z)$ trong đĩa $|z| \leq R$. Nếu $f(z)$ là giải tích khắp nơi bên trong và trên biên của đĩa, và $z = re^{i\theta}(0 \leq r < R)$ là một điểm trong $|z| \leq R$ và $f(z) \neq 0, \infty$ thì*

$$\begin{aligned}\log|f(re^{i\theta})| =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta - \phi) + r^2} \log|f(Re^{i\phi})| d\phi \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_\nu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - b_\nu)}\right| - \sum_{\mu=1}^{m} p_\mu \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - a_\mu)}\right|,\end{aligned}$$

trong đó p_μ là cấp của a_μ và q_ν là cấp của b_ν.

- Ở đây nếu chúng ta đếm các cực điểm hoặc không điểm theo bội của chúng, thì chúng ta có thể bỏ p_μ và q_ν trong biểu thức trên.
- Công thức này được suy ra từ giả thiết không có các cực điểm b_ν hoặc không điểm a_μ trên biên $|z| = R$. Định lí vẫn đúng cho trường hợp có các không điểm và cực điểm trên $|z| = R$.

Hệ quả 1.1.1 (Công thức Possion). *Giả sử rằng $f(z)$ không có không điểm và cực điểm trong $|z| \leq R$. Khi đó nếu $z = re^{i\theta}(0 \leq r < R)$ thì*

$$\log|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta - \phi) + r^2} \log|f(Re^{i\phi})|d\phi.$$

Định lý 1.1.2 (Định lý Jensen). *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong $|z| \leq R(0 < R < \infty)$ và có $a_\mu(\mu = 1, 2, ..., m)$ và $b_\nu(\nu = 1, 2, ..., n)$ tương ứng là các không điểm và cực điểm trong đĩa $|z| \leq R$. Nếu $f(z)$ là giải tích khắp nơi bên trong và trên biên của đĩa, và $f(0) \neq 0, \infty$ thì*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})|d\phi + \sum_{\mu=1}^{m} \log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{\nu=1}^{n} \log\frac{|b_\nu|}{R}.$$

Nhận xét 1.1.1. *Đối với trường hợp $f(z)$ có không điểm bậc λ hoặc cực điểm bậc $-\lambda$ tại $z = 0$ thì khai triển Laurent của $f(z)$ tại gốc tọa độ là $f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1}z^{\lambda+1} + ..., (c_\lambda \neq 0)$, khi đó công thức Jensen có dạng*

$$\log|c_\lambda| + \lambda\log R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})|d\phi + \sum_{\mu=1}^{m} \log\left|\frac{a_\mu}{R}\right| - \sum_{\nu=1}^{n} \log\left|\frac{b_\nu}{R}\right|.$$

Đây là dạng tổng quát của công thức Jensen. Lý thuyết hàm phân hình phụ thuộc phần lớn vào công thức này.

Rolf Nevanlinna đã phát triển một nghiên cứu có hệ thống về lý thuyết phân bố giá trị, bằng các định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai của ông.

Cho $f(z)$ là một hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức. Kí hiệu $n(r, a; f)$ là hàm đếm các a-điểm của $f(z)$ trong đĩa $|z| < r$ với $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, trong đó mỗi a-điểm được tính theo bậc của nó. Đặt

$$N(r, a; f) = \int_0^r \frac{n(t, a; f) - n(0, a; f)}{t}dt + n(0, a; f)\log r,$$

trong đó $n(0, a; f)$ kí hiệu bội của a-điểm của $f(z)$ tại gốc tọa độ. Rõ ràng $n(0, a; f) = 0$ khi $f(0) \neq a$. Nếu $a = \infty$ thì chúng ta đặt

$$N(r, \infty; f) = N(r, f)$$